III) Théorème des accroissements finis

1) Extremum local d'une fonction en un point

a) Définitions

Définition 4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D_f$.*

Nous dirons que la fonction f présente un ***maximum local*** *en a s'il existe un intervalle ouvert I, inclus dans D_f et contenant a tel que : $\forall x \in I$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.*

Nous dirons que la fonction f présente un ***minimum local*** *en a s'il existe un intervalle ouvert I, inclus dans D_f et contenant a tel que : $\forall x \in I$, on a $f(x) \geqslant f(a)$.*

b) Propriété

Proposition 5 *Si la fonction f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Preuve. Supposons par exemple que f présente un maximum local en a.

Il existe donc un intervalle ouvert I, inclus dans D_f et contenant a tel que : $\forall x \in I$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.

Soit $x \in I$ tel que $x > a$; nous avons alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$. (1)

Soit $x \in I$ tel que $x < a$; nous avons alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$. (2)

Comme la fonction f est dérivable en a, nous avons donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Passons à la limite dans la relation (1), nous obtenons $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$, ce qui donne $f'(a) \leqslant 0$.

De même, passons à la limite dans la relation (2), nous obtenons $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$, ce qui donne $f'(a) \geqslant 0$.

Par suite, nous obtenons $\left\{ \begin{array}{l} f'(a) \leqslant 0 \\ f'(a) \geqslant 0 \end{array} \right.$, ce qui donne $f'(a) = 0$. ∎

c) Remarques

Remarque 7 *La réciproque de la propriété précédente est fausse; une fonction dérivable en a vérifiant $f'(a) = 0$ ne présentera pas obligatoirement un extremum local en a.*

Pour s'en convaicre, il suffit de considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3$.

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3\,(x-1)^2$ et nous remarquons que $f'(1) = 0$.

Cependant, cette fonction ne présente pas d'extremum local en 1 car elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8 *La condition $f'(a) = 0$ est appelée* ***condition du premier ordre****. Ce n'est qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local.*

2) Théorème de Rolle

Théorème 1

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $\left\{ \begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right.$.

Alors : $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

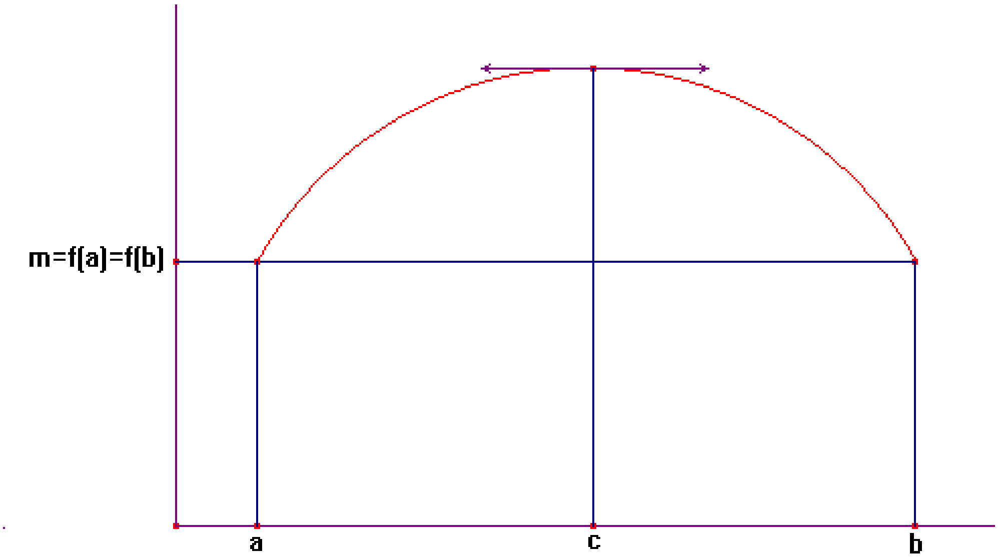
Preuve. Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [m, M]$. (Voir le chapitre 1)

- Si f est constante sur $[a,b]$: alors $\forall x \in]a,b[$, on a $f'(x)=0$ (voir § 2), donc c est quelconque dans $]a,b[$.

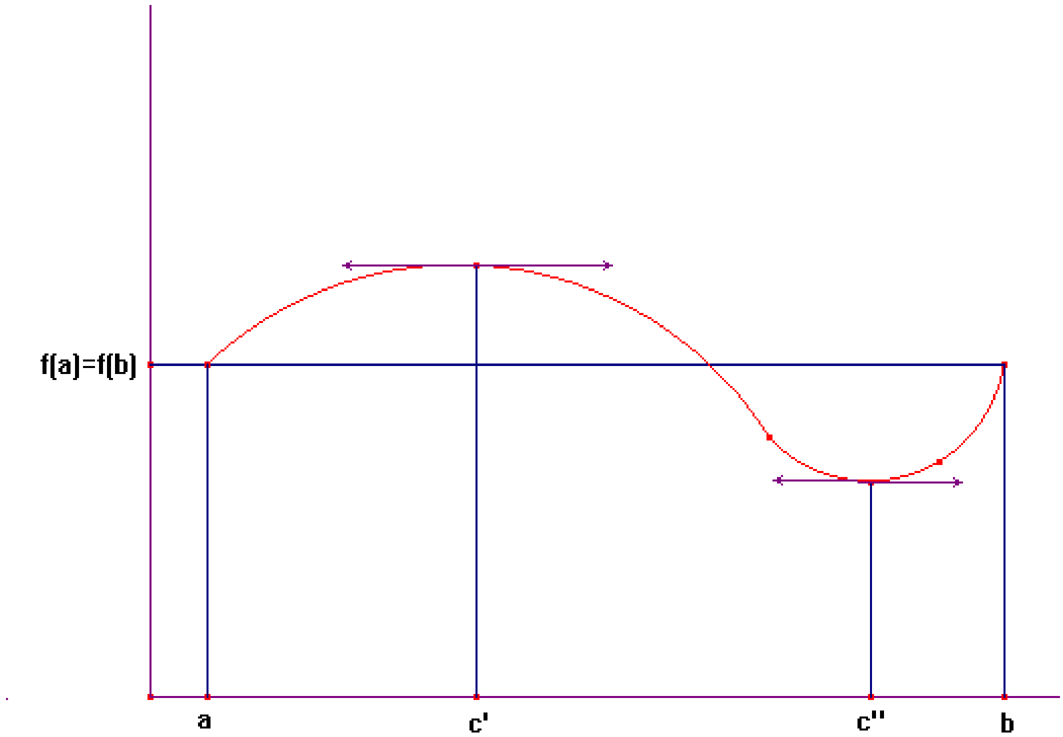
- Si f n'est pas constante sur $[a,b]$: alors nous avons $m < M$.

  Deux cas sont à considérer :

  - Si $m = f(a)$: comme $M \in f([a,b])$, alors : $\exists c \in [a,b]$ tel que $M = f(c)$.
    Puisque $m < M$, alors $f(c) \neq f(a)$ et par conséquent, on a $c \neq a$.
    De plus, comme par hypothèse on a $f(a) = f(b)$, alors $f(c) \neq f(b)$ donc on a $c \neq b$.
    Par conséquent, on a $c \in]a,b[$ et par suite la fonction f est dérivable en c.
    Puisque l'on a : $f([a,b]) = [m,M]$, on en déduit que : $\forall x \in]a,b[$ on a : $f(x) \leqslant M = f(c)$. On en déduit donc que la fonction f présente un maximum local en c et en utilisant la condition du premier ordre vue précédemment, on en déduit que $f'(c) = 0$.
    Interprétation graphique :

    $f'(c) = 0$ se traduit graphiquement par une tangente horizontale.
  - Si $m \neq f(a)$: comme $m \in f([a,b])$, alors : $\exists c' \in [a,b]$ tel que $m = f(c')$.
    On a : $f(a) \neq m = f(c')$, donc $f(a) \neq f(c')$ et par suite on déduit que $c' \neq a$.
    Comme par hypothèse on a $f(a) = f(b)$, on en déduit que $f(c') \neq f(b)$, donc que $c' \neq b$.
    Par conséquent, on a $c' \in]a,b[$ et par suite la fonction f est dérivable en c'.
    Puisque l'on a : $f([a,b]) = [m,M]$, on en déduit que : $\forall x \in]a,b[$ on a : $f(x) \geqslant m = f(c')$. On en déduit donc que la fonction f présente un minimum local en c' et en utilisant la condition du premier ordre vue précédemment, on en déduit que $f'(c') = 0$.
    Interprétation graphique :



Si $f(a) = f(b)$, il existe donc au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. (Sur le schéma il y en a deux)

- Conclusion : dans tous les cas : $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

■

3) Théorème des accroissements finis

Théorème 2

Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $\left\{\begin{array}{l} f \textit{ est continue sur } [a, b] \\ f \textit{ est dérivable sur }]a, b[\end{array}\right.$.

Alors : $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a).f'(c)$ soit encore : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Preuve. Considérons les points $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ et $M(x, f(x))$ sur la courbe (C) représentative de la fonction f et le point N d'abscisse x sur la sécante (AB).

La droite (AB) a pour équation : $y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

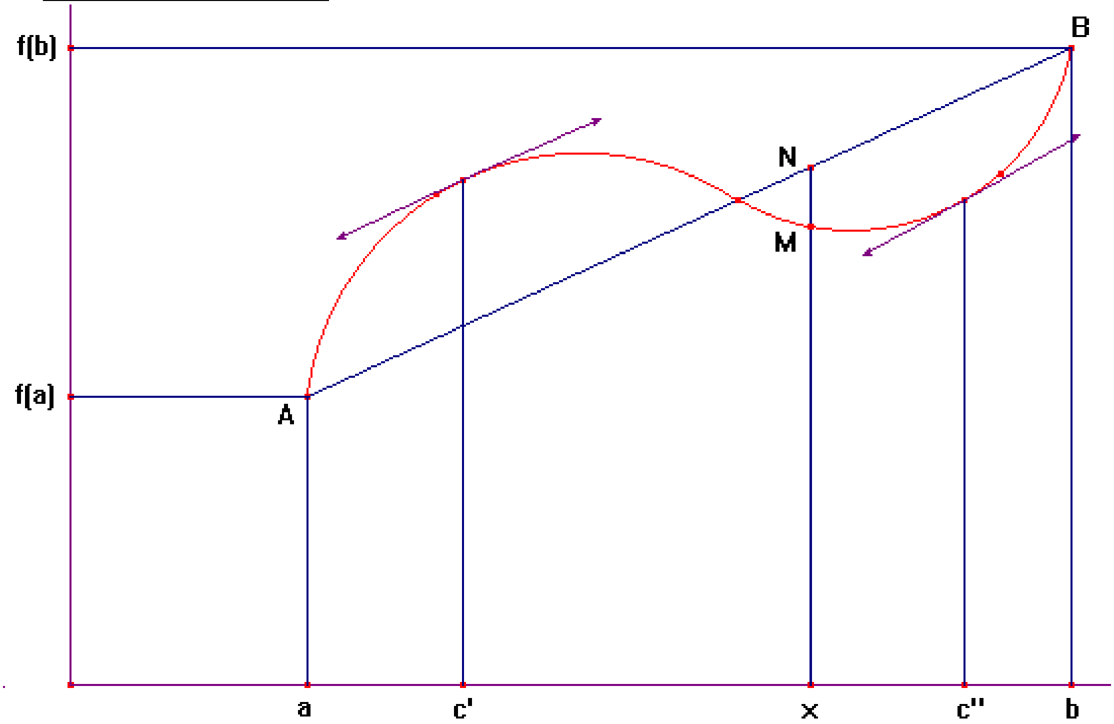
Notons $\varphi(x) = \overline{NM}$. On a alors $\varphi(x) = y_M - y_N = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$.

- La fonction φ est la somme de la fonction f, continue sur $[a, b]$ et d'un polynôme, continu sur $\mathbb{R}$, donc φ est continue sur $[a, b]$.
- De même, la fonction φ est dérivable sur $]a, b[$.
- De plus, on a : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ : $\exists c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or puisque : $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on en déduit que : $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
■

Interprétation graphique :



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite (AB).

$f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse c.

Il existe donc au moins un point de la courbe représentative de f en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB). (Sur le schéma il y en a deux).

4) Applications

Théorème 3

Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $\left\{ \begin{array}{l} f \textit{ est continue sur } [a,b] \\ f \textit{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[\textit{ on a } f'(x) = 0 \end{array} \right.$.

Alors la fonction f est constante sur $[a,b]$.

Preuve. Soit x un élément quelconque de$[a,b]$.

La fonction f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$ (car f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$).

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[a,x]$, il existe $c \in]a,x[$ tel que : $f(x) - f(a) = (x-a).f'(c)$.

Or $\forall x \in]a,b[$ on a $f'(x) = 0$, donc on a $f'(c) = 0$, d'où $f(x) = f(a)$.

Par conséquent, la fonction f est constante sur $[a,b]$. ■

Théorème 4

Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $\left\{ \begin{array}{l} f \textit{ est continue sur } [a,b] \\ f \textit{ est dérivable sur }]a,b[\end{array} \right.$.

Alors : $\left\{ \begin{array}{c} (f \text{ est croissante sur } [a,b]) \Leftrightarrow (\forall x \in]a,b[\text{ on a } f'(x) \geqslant 0) \\ (f \text{ est décroissante sur } [a,b]) \Leftrightarrow (\forall x \in]a,b[\text{ on a } f'(x) \leqslant 0) \end{array} \right.$.

De plus, $\left\{ \begin{array}{c} \text{Si } f'(x) > 0 \text{ sur }]a,b[, \text{ alors } f \text{ est strictement croissante sur } [a,b] \\ \text{Si } f'(x) < 0 \text{ sur }]a,b[, \text{ alors } f \text{ est strictement décroissante sur } [a,b] \end{array} \right.$.

Preuve.

- Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ sur $]a,b[$, montrons alors que f est croissante sur $[a,b]$.

  Si x_1 et $x_2 \in [a,b]$ et si $x_1 < x_2$, alors on a d'après le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[x_1, x_2]$:

  $\exists c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1).f'(c)$.

  Comme on a : $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ soit encore $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. La fonction f est donc croissante sur $[a,b]$.

  Remarque : si dans la démonstration précédente, on avait pris l'hypothèse $f'(x) > 0$, on aurait obtenu le résultat $f(x_2) > f(x_1)$ et la fonction f serait strictement croissante sur$[a,b]$.

- Réciproquement, supposons que f est croissante sur$[a,b]$ et montrons qu'alors on a : $\forall x_0 \in]a,b[$ on a : $f'(x_0) \geqslant 0$.

  Puisque f est croissante sur $[a,b]$, alors : $\forall x \in]a,b[- \{x_0\}$ on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

  Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, nous obtenons : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, soit encore $f'(x_0) \geqslant 0$.

- Les démonstrations sont analogues dans le cas des fonctions décroissantes.

■

Remarque 9 *Si $f'(x) \geqslant 0$ sur $]a,b[$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ..., on peut alors diviser l'intervalle $]a,b[$ en intervalles $]a, x_1[$, $]x_1, x_2[$, ... sur lesquels on a $f'(x) > 0$, et en appliquant le théorème précédent, f est strictement croissante sur $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., donc f est strictement croissante sur $[a,b]$.*

En conclusion, nous pouvons dire que si $f'(x) \geqslant 0$ sur $]a,b[$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.