DÉTERMINANTS

NIVEAU 0

Déterminant d'un tableau 2x2

$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Déterminant d'un tableau nxn

$\det |\mathbf{A}| = \sum_{i} a_{ij} A_{ij}$ où A_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de la matrice (carrée) **A**

Opérations laissant le déterminant inchangé

Transposition

Remplacement d'une ligne par elle même et une combinaison linéaire des autres lignes

De même pour une colonne.

Opérations modifiant le déterminant

Multiplication d'une ligne par un scalaire = multiplication du déterminant par le scalaire

De même pour une colonne

Permutation de deux lignes adjacentes = multiplication du déterminant par –1

De même pour deux colonnes.

Valeurs particulières

Déterminant d'une matrice diagonale = produit des termes diagonaux

Déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure)= produit des termes diagonaux

Une ligne = combinaison linéaire des autres $\Rightarrow$ déterminant nul

Une colonne = combinaison linéaire des autres $\Rightarrow$ déterminant nul

NIVEAU 1

Niv 1 - Exercice 1

Calculer les déterminant des matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **B** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **C** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;**D** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **E** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Niv 1 - Exercice 2

Calculez les déterminants des matrices

F = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **G** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 11 & 12 & 3 \end{pmatrix}$; **H** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; **K** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **L** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Niv 1 - Exercice 3

Pour les matrices ci-dessous, déterminez la combinaison de lignes ou de colonnes qui permet de conclure que le déterminant est nul.

M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \end{pmatrix}$, **N** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **O** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 g \\ \sin^2 a & \sin^2 c & \sin^2 c \end{pmatrix}$, **P** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a+a^2 & a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix}$

Niv 1 - Exercice 4

Par des opérations simples, faire apparaître des zéros dans la partie au-dessous ou au-dessus de la diagonale des matrices suivantes, puis calculer leur déterminant.

R = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, **S** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, **T** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, **U** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

NIVEAU 2

Niv 2 - Exercice 1

Calculez les déterminants des matrices

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} ; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 3 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix} ; \mathbf{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} ; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} ;$$

Niv 2 - Exercice 2

Calculez les déterminants des matrices

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Niv 2 - Exercice 3

Calculez les déterminants des matrices

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

Niv 2 - Exercice 4

Calculez les déterminants des matrices

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4{,}7 \\ 2{,}4 & 1{,}1 & 2{,}5 \\ 4{,}1 & 4{,}7 & 4{,}1 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 4{,}9 & 4{,}8 & 2{,}8 \\ 0{,}8 & 3{,}8 & 2{,}5 \\ 2{,}9 & 3{,}8 & 2{,}9 \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4{,}8 & 3{,}6 & 3{,}2 \\ 0{,}9 & 2{,}2 & 3{,}9 \\ 4{,}1 & 4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

NIVEAU 3

Niv 3 - Exercice 1

Les 3 vecteurs de $\Re^4$ ci-dessous forment-ils une base ou sont ils liés ?

$\mathbf{U_1}$: $(1;2;3;4)^t$; $\mathbf{U_2}$: $(6;2;3;1)^t$; $\mathbf{U_3}$: $(4;3;2;4)^t$

Niv 3 - Exercice 2

Calculez le déterminant de la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 2,9 & 2,1 & 1,3 & 4 \\ 4,2 & 4,2 & 4,7 & 3 \\ 4,2 & 5 & 2,6 & 3,4 \\ 2,4 & 1,6 & 4,5 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Niv 3 - Exercice 3

On désigne par I_n la matrice identité de rang n, et par J_n la matrice de mêmes dimensions dont tous les éléments sont égaux à 1. Calculez le déterminant de la matrice a I_n + bJ_n .

DÉTERMINANTS - RÉPONSES

Réponse Niv 1 - Exercice 1

det A = –1 ; det B = 0 ; det C = 0 ; det D = 1 ; det C = –1

Réponse Niv 1 - Exercice 2

det **F** = 6 ; det **G** = 6

Pour **H**, en développant par rapport à la première colonne :

$$\det \mathbf{H} = (1)\,(-1)^2 \det\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (1)\,(-1)^3 \det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (1)\,(-1)^4 \det\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(28 - 30) - (1)(14 - 18) + (1)(10 - 12) = 0$$

Le résultat était "évident" : la dernière colonne est la somme des deux autres.

Pour **K**, on développe à partir de la première ligne :

$$\det \mathbf{K} = (1)\,(-1)^2 \det\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (0)\,(\ldots) + (1)\,(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + (-1) = 5$$

Pour **L**, le calcul est inutile, la première et la troisième lignes sont identiques, le déterminant est nul.

Réponse Niv 1 - Exercice 3

Pour **M** la troisième ligne est la somme de deux premières, det **M** = 0

Pour **N**, la troisième colonne est la somme des deux premières, det **N** = 0

Pour **O**, la première ligne est la somme des deux autres, det **O** = 0.

Pour **P**, la troisième ligne = la deuxième + a fois la deuxième, det **P** = 0.

Réponse Niv 1 - Exercice 4

pour **R** : $L2 \to L2 - L1$ et $L3 \to L3 - L1$:$\mathbf{R_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; det **R** = det $\mathbf{R_1}$ inchangé

pour $\mathbf{R_1}$: permutation L2 et L3 : $\mathbf{R_2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ det $\mathbf{R_2}$ = – det $\mathbf{R_1}$ et comme det $\mathbf{R_2}$ = 2 , det **R** = –2

pour **S** : $L1 \to L1/3$ et $L2 \to L2/4$ donne $\mathbf{S_1}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ det **S** = (3)(4) det $\mathbf{S_1}$

et comme $\mathbf{S_1}$ = **R** , det **S** = (12)(–2) = –24

pour **T** : $L2 \to L2 - L1$ et $L3 \to L3 - L1$ donne $\mathbf{T_1}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et det **T** = det $\mathbf{T_1}$

puis $\mathbf{T_2}$: $L3 \to L3 - 3L2$ donne $\mathbf{T_2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec det $\mathbf{T_1}$ = det $\mathbf{T_2}$ = 2

pour U : $C3 \to C3 - (C1 + C2)$ donne $\mathbf{U_1}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et det **U** = det $\mathbf{U_1}$ = 0

Réponse Niv 2 - Exercice 1

det **F** = 24

det **G** = 24

$$\det \mathbf{H} = (1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = (1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) = 0$$

pour **K** , on retranche L2 une fois aux ligne L1 et L3 et 3 fois à L4

$$\det \mathbf{K} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ par L3} \rightarrow \text{L3 + L1 + L2}$$

$\det \mathbf{K} = (-1)(-4) = 4$

<u>Réponse Niv 2 - Exercice 2</u>

$\det \mathbf{L} = 28$

$$\det \mathbf{M} = (1) \det \begin{vmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{vmatrix} + (-b) \det \begin{vmatrix} b & b \\ b & 1 \end{vmatrix} + (b) \det \begin{vmatrix} b & b \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$\det \mathbf{M} = (1 - b^2) - 2b(b - b^2) = (1 - b)^2(1 + 2b)$ (qui donne bien 28 pour b = 3)

$$\det \mathbf{N} = a^3 \det \begin{vmatrix} 1 & b/a & b/a \\ b/a & 1 & b/a \\ b/a & b/a & 1 \end{vmatrix} = a^3 \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2 \left(1 + 2\frac{b}{a}\right) = (a - b)^2 (a + 2b)$$

qui redonne bien le précédent pour a = 1

<u>Réponse Niv 2 - Exercice 3</u>

$\det \mathbf{O} = 20$

$\det \mathbf{P} = a^2 (3 + a)$

la structure de la matrice offre des possibilités intéressantes de simplifications. On retranche d'abord la dernière ligne à toutes les autres, puis on met a en facteur pour les deux première lignes et enfin on retranche les 2 première lignes à la troisième

$$\det P = \det \begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & -a \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2 \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2 \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3+a \end{vmatrix} = a^2 (3 + a)$$

$\det \mathbf{Q} = a^2 (a + 3b)$

on procède avec quasiment les mêmes simplifications que ci-dessus.

<u>Réponse Niv 2 - Exercice 4</u>

Déterminants à calculer sans astuce particulière

$\det \mathbf{R} = 18{,}159$, $\det \mathbf{S} = 8{,}768$, $\det \mathbf{T} = -32{,}464$

<u>Réponse Niv 3 - Exercice 1</u>

La matrice de Gram s'obtient par le produit $X^T X$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 23 & 32 \\ 23 & 50 & 40 \\ 32 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est 3375, le système de vecteurs est donc libre.

<u>Réponse Niv 3 - Exercice 2</u>

Cette taille de déterminant commence à imposer une autre méthode de calcul. La bonne méthode consiste à transformer étape par étape la matrice en matrice triangulaire. La procédure est la suivante :

On divise la première ligne par son premier élément (non nul) – soit 2,9, cela donne :

L1	1	0,72414	0,44828	1,37931

puis on soustrait cette ligne à toutes les autres en la multipliant par les premiers éléments non nuls de ces lignes, il vient :

L2	0	1,15862	2,81724	-2,79310
L3	0	1,95862	0,71724	-2,39310
L4	0	-0,13793	3,42414	-2,11034

On divise L2 par son premier élément – soit 1,15862, cela donne :

L2	0	1	2,43155	-2,41071

on soustrait cette ligne aux deux autres en la multipliant par les premiers éléments non nuls de ces lignes, respectivement 1,95862 pour L3 et -0,13793 pour L4, il vient :

L3	0	0	-4,04524	2,32857
L4	0	0	3,75952	-2,44286

On divise L3 par son premier élément non nul – soit -4,04524, cela donne :

L3	0	0	1	-0,57563

qu' on retranche à la dernière après l'avoir multipliée par le premier élément non nul de L4, soit 3,75952. Il vient :

	0	0	0	-0,27875

La matrice a désormais la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,72414 & 0,44828 & 1,37931 \\ 0 & 1 & 2,43155 & -2,41071 \\ 0 & 0 & 1 & -0,57563 \\ 0 & 0 & 0 & -0,27875 \end{pmatrix}$$

Le déterminant cherché est donc : (2,9)(1,15862)(-4,04524)(-0,27875) = 3,7888.

Cette méthode est recommandée dès que la dimension atteint 4, à plus forte raison pour des dimensions supérieures. C'est un algorithme de cette forme qui est en général programmée dans les logiciels. La lourdeur des écritures n'est pas un contrainte trop lourde si on dispose d'une calculette avec une possibilité de stockage suffisante.

Réponse Niv 3 - Exercice 3

$a^{(n-1)} (a + nb)$

indication : on reprendra la démarche de l'exercice Niv 2 - Exercice 3 – matrice **Q**. La méthode utilisée alors s'étend à une matrice de dimension quelconque. Il faut juste mettre un peu de précautions dans les écritures pour gérer les calculs.