Dérivation

Exercice 1. *Limite double*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tq } \forall\ h, k \in]0, \delta[,\ \left|\frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 2. *Propriétés de parité et de périodicité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2) Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3) Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 3. *Propriété de parité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la fonction $t \longmapsto 2f(t) - tf'(t)$ est paire. f est-elle paire ?

Exercice 4. *Injectivité locale*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\ x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2) Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

Exercice 5. *Dérivabilité de $|f|$*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Exercice 6. *$f'(x) \longrightarrow \ell$ et f est bornée*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 7. $\lim\limits_{\infty} f'(x) = \lim\limits_{\infty} f(x)/x$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
Chercher un contrexemple pour la réciproque.

Exercice 8. *Propriété des valeurs intermédiaires pour f'*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On suppose que : $\forall\ x \in [a, b],\ f'(x) \neq 0$. Montrer que f' est de signe constant.
2) Dans le cas général, montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle.

Exercice 9. *Propriété des valeurs intermédiaires pour f'*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On note $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 \text{ tq } x < y\}$ et pour $(x, y) \in E$: $\varphi(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Montrer que $\varphi(E)$ est un intervalle.
2) En déduire que $f'([a, b])$ est un intervalle.

Exercice 10. *Règle de l'Hospital*

Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec : $\forall\ x \in]a, b[,\ g'(x) \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
(Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi)
2) En déduire que si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$ (règle de l'Hospital).
3) Application : déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 11. *Recherche de limite*

Trouver $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\ln(\sin x) - \ln(\cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Exercice 12. *$f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0 \Longrightarrow$ il existe un autre zéro*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$, et $f'(c) \leqslant 0$.

Exercice 13. *$f'(a) = f'(b)$*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Exercice 14. *Tangentes passant par un point donné*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 15. *Rolle itéré*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.
1) Si f s'annule en $n+1$ points distincts dans $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2) Si $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 16. *Rolle à l'infini*
Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $x \in]a, +\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

Exercice 17. *Formule des accroissements finis avec $\theta = 1/2$*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b - a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Montrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice 18. *Fonction $\mathcal{C}^\infty$ bornée*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornée.
1) Montrer que si une dérivée, $f^{(k)}$, $k \geqslant 2$, admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes, $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$, tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2) En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k - 1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. *Distance à la corde*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

(Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t - a)(b - t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)

2) Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 20. *Écart à un polynôme interpolateur*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a_1, \ldots, a_n$ n points distincts dans $\mathbb{R}$, et P le polynôme de Lagrange prenant les mêmes valeurs que f aux points a_i. On pose $Q(x) = \dfrac{1}{n!} \prod\limits_{i=1}^{n} (x - a_i)$.
Montrer que : $\forall\, b \in \mathbb{R},\ \exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $f(b) = P(b) + Q(b) f^{(n)}(c)$
(considérer $g(t) = f(t) - P(t) - \lambda Q(t)$ où λ est choisi de sorte que $g(b) = 0$).

Exercice 21. *Polynômes de Legendre*
On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.
1) Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 22. *Racines de* $x^n + ax + b$
Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles distinctes si n est pair, et plus de trois racines réelles distinctes si n est impair.

Exercice 23. *Racines de* $P(x) - e^x$
Soit P un polynôme. Montrer qu'il existe au plus un nombre fini de réels x tels que $P(x) = e^x$.

Exercice 24. *Limite de* $1/(n+1) + \ldots + 1/2n$
On veut calculer $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.
1) Montrer l'existence de ℓ.
2) Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell f'(0)$.
3) On prend $f(x) = \ln(1+x)$. Déterminer ℓ.

Exercice 25. *Calcul de limite*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Chercher $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 26. *Somme* $1/k \ln k$
Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, appliquer le théorème des accroissements finis à $x \longmapsto \ln(\ln x)$ sur $[k, k+1]$. En déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{k \ln k}$ est divergente.

Exercice 27. $f'(x)f'(f(x)) = 1$
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x)) = 1 \\ f(0) = 0 \text{ et } f'(0) > 0. \end{cases}$

Exercice 28. $f \circ f = f$
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dérivable telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou bien $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Exercice 29. *Dérivabilité uniforme*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tq } \forall\, x, y \in [a,b],\ \text{si } 0 < |x-y| < \delta,\ \text{alors } \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - f'(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 30. *Formes indéterminées*
Soient $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ u(x) \neq v(x) \\ \lim\limits_{x\to0} u(x) = \lim\limits_{x\to0} v(x) = a > 0. \end{cases}$
1) Chercher $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{u^v - v^v}{u - v}$.
2) Chercher $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{u^v - v^u}{u^u - v^v}$.

Exercice 31. $(1+k)(1+k^2)\ldots(1+k^n)$
1) Montrer que : $\forall\, x \geqslant -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2) Soit $k \in\,]-1, 1[$. On pose $u_n = (1+k)(1+k^2)\ldots(1+k^n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente (traiter séparément les cas $k \geqslant 0$, $k < 0$).

Exercice 32. *Dérivée n-ème de* $\cos^3 x$
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $x \longmapsto \cos^3 x$.

Exercice 33. *Dérivée n-ème de* $\arctan x$ *et* e^{x^3}
Établir une formule de récurrence pour les dérivées successives des fonctions :
$f : x \longmapsto \arctan x$ et $g : x \longmapsto e^{x^3}$.

Exercice 34. *Dérivée n-ème de* $(x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$.

Exercice 35. *Ensi Chimie P 94*
Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36. *Dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$*

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto x^n(1-x)^n$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Exercice 37. *Dérivées n-èmes de $t^{n-1}\ln(t)$ et $t^{n-1}e^{1/t}$*

Calculer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^{n-1}\ln t\right)$, et $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^{n-1}\exp(1/t)\right)$ (essayer $n = 1, 2, 3$).

Exercice 38. *Dérivée n-ème de $f(x^2)$*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g(x) = f(x^2)$.

1) Montrer qu'il existe des entiers $a_{n,k}$ tels que : $\forall\ x,\ g^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.

2) Calculer $a_{n,k}$ en fonction de n et k.

Exercice 39. *Dérivée n-ème de $f(1/x)$*

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I ne contenant pas 0, et $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Établir : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 40. *Dérivées de e^{-1/x^2}*

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \longmapsto & 0. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

Exercice 41. $(f(2t) - f(t))/at$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\dfrac{f(2t) - f(t)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} a$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = a$.

Exercice 42. $\sin x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geqslant 0$

On pose $f(x) = \sin x - \dfrac{3x}{\pi} + \dfrac{4x^3}{\pi^3}$. Montrer que : $\forall\ x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ (chercher le signe de $f^{(4)}$).

Exercice 43. *Courbes homothétiques*

Soit $a > 0,\ a \neq 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $y = \ln x$, et $\mathcal{C}'$ celle d'équation : $y = a \ln x$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont une et une seule tangente commune.

2) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont homothétiques.

Exercice 44. *Matexo*

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x)f'(x) \geqslant 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.

Exercice 45. *Mines MP 2000*

Montrer que pour tout x réel, il existe $a(x)$ unique tel que $\displaystyle\int_{t=x}^{a(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$. Montrez que a est indéfiniment dérivable, et que son graphe est symétrique par raport à la deuxième bissectrice.

Exercice 46. $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ *(Centrale MP 2003)*

Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Exercice 47. $f' = f^{-1}$ *(Ens Cachan MP* 2003)*

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ bijectives de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ telles que $f' = f^{-1}$.

1) Trouver un élément de E du type $x \longmapsto cx^m$, où c et m sont réels.

2) Quelle est la limite en 0 de f ?

3) Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que f admet un unique point fixe.

5) Soit g un deuxième élément de E. Montrer que g admet le même point fixe que f.

Solutions

Exercice 3.
Ctrex : $f(t) = t^2$ si $t \geqslant 0$ et $f(t) = -t^2$ si $t < 0$.

Exercice 11.
TAF $\Longrightarrow \ell = \sqrt{2}$.

Exercice 17.
Dériver par rapport à a puis par rapport à b.

Exercice 21.
2) $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.

Exercice 25.
$\dfrac{f'(0)}{2}$.

Exercice 27.
$f = \mathrm{id}$.

Exercice 30.
1) AF $\Longrightarrow \exists\ w(x)$ compris entre $u(x)$ et $v(x)$ tel que $\dfrac{u^v - v^v}{u - v} = vw^{v-1} \longrightarrow a^a$.
2) $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u - v)(vw_1^{v-1} - (\ln v)v^{w_2})$
$u^u - v^v = (u - v)w_3^{w_3}(1 + \ln w_2)$
$\Longrightarrow \lim = \dfrac{1 - \ln a}{1 + \ln a}$.

Exercice 31.
2) Pour $k \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante et $\ln u_n \leqslant \dfrac{k}{1-k}$.
Pour $k < 0$, (u_{2n}) décroît et converge, et $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Exercice 33.
$(1 + x^2)f^{(n+1)} + 2nxf^{(n)} + n(n-1)f^{(n-1)} = 0$ pour $n \geqslant 1$.
$g^{(n+1)} = 3x^2 g^{(n)} + 6nxg^{(n-1)} + 3n(n-1)g^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 0$.

Exercice 34.
$(-1)^n e^{-x}\big(x^3 + (2 - 3n)x^2 + (3n^2 - 7n)x + (-n^3 + 5n^2 - 4n - 5)\big)$.

Exercice 35.
$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + n\frac{\pi}{6})$.

Exercice 36.
$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n(1-x)^n\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} n!\,\big(C_n^k\big)^2(-1)^{n-k}x^{n-k}(1-x)^k$.
coefficient de $x^n = (-1)^n n!\ \sum\limits_{k=0}^{n}\big(C_n^k\big)^2 = (-1)^n A_{2n}^n$.

Exercice 37.
$\dfrac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \dfrac{(-1)^n}{t^{n+1}}\exp(1/t)$.

Exercice 38.
1) $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} + 2(2k - n)a_{n,k}$.
2) $a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Exercice 43.
1) Au point d'abscisse α tq $\ln\alpha = \dfrac{a\ln a}{1-a} + 1$ pour $\mathcal{C}$, et $\alpha' = a\alpha$ pour $\mathcal{C}'$.
2) Centre $= \Big(0, \dfrac{a\ln a}{1-a}\Big)$, rapport $= a$.

Exercice 44.

Si f change de signe, soit par exemple $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $a < b$ et $c = \sup\{x \text{ tq } f_{|[a,x]} \text{ est croissante}\}$. Alors f est croissante sur $[a, c]$ et $f(c) = 0$, contradiction.

Exercice 45.

Si l'on pose $F(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, on constate que $a(x) = F^{-1}(1 + F(x))$ ce qui prouve l'existence, l'unicité et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de a. Pour la symétrie, il faut montrer que $a(-a(x)) = -x$ soit $\displaystyle\int_{t=-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ ce qui est immédiat.

Exercice 46.

Toute fonction linéaire $\varphi : x \longmapsto ax$ convient. Réciproquement, si φ est solution alors $\varphi(0) = 0$. On note $a = \varphi'(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ est également solution et $\psi'(0) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où $\psi = 0$ et $\varphi(x) = ax$.

Exercice 47.

1) $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.

4) f et f' ont des limites nulles en 0^+ et infinies en $+\infty$ donc $f(x) = \underset{x\to 0^+}{\mathrm{o}}(x)$ et $x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$, ce qui implique que $f(x) - x$ s'annule sur $]0, +\infty[$. S'il y a deux points fixes, $a < b$, alors par le thm. des accroissements finis l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution dans $]0, a[$ et une dans $]a, b[$, en contradiction avec la bijectivité de $f' = f^{-1}$.

5) On note a le point fixe de f, b celui de g et on suppose $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a $g(x) < x$ pour $x \in]0, b[$ donc $g(a) < a = f(a)$. Par conséquent $g(x) < x \leqslant f(x)$ si $x \in [a, b[$; soit $]c, b[$ le plus grand intervalle sur lequel $g(x) < f(x)$. On a $0 \leqslant c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leqslant c$ et f, g sont strictement croissantes, donc $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$ pour $x \in]c, b[$. Ainsi $g - f$ est strictement croissante sur $]c, b[$ a une limite nulle en c^+ et est négative en b, c'est absurde.

Remarque : le point fixe est le nombre d'or m. De plus, si f et g sont deux éléments de E distincts alors $f - g$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de m^- (même démonstration).